Intégrale de Fresnel

Proposition On considère l'intégrale de Fresnel $\varphi := \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$.
Alors $\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :
$$F(t) := \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \text{et} \quad f(t) := \int_0^t e^{ix^2}\,dx$$

• Étape 1 :

On a :
$$e^{ix^2} e^{iy^2} = e^{i(x^2+y^2)} \quad \text{donc par Fubini, } F(t) = f(t)^2$$
on est sur un pavé $\Rightarrow$ intégrable OK !

D'autre part,
$$F(t) = 2 \iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \text{où } \Delta_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant t,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$$
$$\text{"} \quad = 2 \iint_{K_t} e^{ir^2} r\,dr\,d\theta \quad \text{par passage en coordonnées polaires, avec } K_t = \{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r\cos\theta \leqslant t,\ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{4}]\}$$
$$\text{"} \quad = 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{t/\cos\theta} R e^{iR^2}\,dR\,d\theta = \frac{i\pi}{4} - i \int_0^{\pi/4} e^{it^2/\cos^2\theta}\,d\theta$$
par Fubini

• Étape 2 :

On considère $I(T) := \frac{1}{T} \int_0^T F(t)\,dt$, la moyenne de F.
Alors :
$$I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^T \int_0^{\pi/4} e^{it^2/\cos^2\theta}\,d\theta\,dt$$
$$\text{"} \quad = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\pi/4} \int_0^T e^{it^2/\cos^2\theta}\,dt\,d\theta \quad \text{par Fubini avec } (t,\theta) \longmapsto e^{it^2/\cos^2\theta} \text{ continue sur un pavé}$$
$$\text{"} \quad = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\pi/4} \int_0^{T/\cos\theta} e^{iu^2} \cos\theta\,du\,d\theta = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\pi/4} f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right) \cos\theta\,d\theta$$

$\varphi = \int_0^{+\infty} e^{iu} \frac{u^{-1/2}}{2}\,du$ qui cv

Or φ converge donc f est une fonction bornée.
Ainsi : $I(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \frac{i\pi}{4}$

Or $F(t) = f(t)^2$, donc $I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2\,dt$ est la moyenne de Césaro donc $I(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \varphi^2$.
car $f(t)^2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} \varphi^2$

Ainsi :
$$\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{5i\pi/4}$$

• Étape 3 :

On a :
$$\varphi = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}}\,du \quad \text{donc} \quad \operatorname{Im} \varphi = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du := \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du + \int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du + \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y+\pi}}\,dy = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin u \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right) du.$$
chgmt de variables $y = u - \pi$

On obtient par positivité de l'intégrande, $u_n \geqslant 0$.

Donc :
$$\operatorname{Im} \varphi \geqslant 0 \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$$